

AGORÀ MATEMATICO 2012-13

***probabilità e assicurazioni
sulla vita***

Maria Teresa Borgato

Dipartimento di Matematica e Informatica
Ferrara, 3 maggio 2013

Cronologia del calcolo delle probabilità (senza ambizioni di completezza)

Alcune anticipazioni negli scritti di **Luca Pacioli (1482)**, **Girolamo Cardano**, **Niccolò Tartaglia**, ed altri matematici del Rinascimento, **Kepler**, **Galileo**.

In particolare **Girolamo Cardano** scrive la prima opera sulla probabilità, interamente dedicata al gioco d'azzardo: *Liber de ludo aleae*, scritto negli anni **1560**, pubblicato nel 1663.



Inizio del calcolo delle probabilità. Il Cavalier de Méré propone un problema di azzardo, il **problema delle parti**, o **dei punti**, che verrà discusso nella corrispondenza di **Pascal e Fermat (1654)**

Christian Huygens nel **1659** sviluppa e organizza le conoscenze nel fondamentale trattato *De ratiociniis in ludo aleae*.



Parallelamente si sviluppa il **calcolo combinatorio** strettamente collegato alla teoria della probabilità, (Wallis **1693**, Buckley, Pascal: **il triangolo di P.**, Van Schooten **1658**, Leibniz **1666**)

Prime ricerche a carattere scientifico su **mortalità e assicurazioni sulla vita** (John Graunt 1662, Johannes Hudde, Johan de Witt, Edmund Halley)

Varie investigazioni negli anni 1670-1700 anche a carattere sociale (Caramuel, Sauveur, Jacob Bernoulli, Leibniz, Arbuthnot, Roberts, Craig: **la probabilità di colpevolezza di un accusato**).

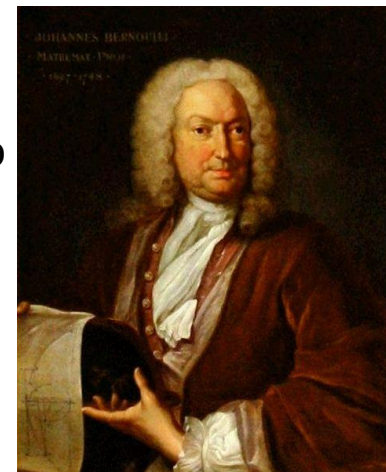
I metodi a priori della probabilità combinatoria e quelli a posteriori della prima statistica si fondono nell'*Ars Conjectandi* (Basilea, 1713) di **Jacob Bernoulli** considerato il **fondatore della teoria della probabilità come scienza matematica**. Il trattato contiene applicazioni alla teoria dei giochi, alla morale e alle scienze economiche; **Teorema di Bernoulli**

Legge debole dei grandi numeri (Bernoulli):

Data una successione di prove indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità del verificarsi di un evento (successo) è p , siano n il numero delle prove ed m la variabile casuale uguale al numero dei successi. Allora, qualunque siano i numeri positivi ϵ e η , la probabilità P della disuguaglianza

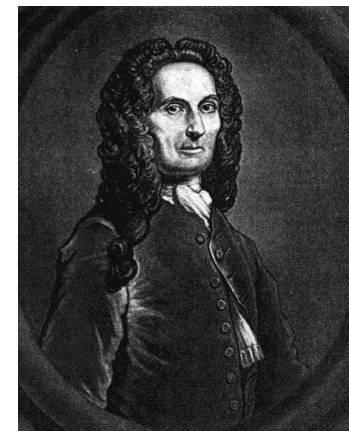
$$- \epsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \epsilon$$

è maggiore di $1-\eta$, per tutti gli n sufficientemente grandi ($n > n_0$).



Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708, 1713

Abraham De Moivre (*The Doctrine of Chances : a method of calculating the probabilities of events in play* 1718, 1738, 1756): dedicato essenzialmente alla **teoria dei giochi**, contiene nella seconda edizione la **distribuzione normale**, un caso particolare del teorema del limite centrale (**teorema di De Moivre – Laplace**), applicazioni alla **scienza attuariale** e al **calcolo delle rendite** (nella terza edizione postuma).



Varie investigazioni tra gli anni 1700-1750 (Nicolaus Bernoulli, Arbuthnot, Nicole, Buffon, Hann, Simpson, Johann Bernoulli)

Daniel Bernoulli (varie memorie: sulla **speranza morale** in contrapposizione alla **speranza matematica 1788**, sulla **mortalità causata dal vaiolo** e sui vantaggi della sua **inoculazione...**)

Eulero : varie memorie di **teoria dei giochi**, matematici e d'azzardo (come lotterie, gioco del faraone...) sulla **mortalità e la crescita demografica**, su **rendite vitalizie, tontine e altre forme di assicurazione** (come casse per i morti e fondi pensione...)

D'Alembert (**critica ai principi fondamentali** della disciplina, **controversia con Daniel Bernoulli** sulla investigazione relativa ai vantaggi della **inoculazione del vaiolo**)

Thomas **Bayes**. *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (1763, pubblicato postumo nelle *Philosophical Transactions* della Royal Society di Londra): Il **teorema di Bayes** ha dato origine a quella parte della teoria che si occupa di della **probabilità inversa** (probabilità delle cause dedotta dagli effetti osservati).
Riscoperto indipendentemente da Laplace.

Considerando un insieme di alternative $A_1, A_2 \dots A_n$ (partizione dello [spazio degli eventi](#)) si trova la seguente espressione per la [probabilità condizionata](#):

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{P(E)} = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(E|A_j)P(A_j)}$$

Lagrange. I maggiori contributi riguardano la **teoria degli errori**, derivanti dal prendere la media delle osservazioni, e la risoluzione di problemi classici di **teoria dei giochi** (delle parti, di durata del gioco o delle urne di Bernoulli) mediante **equazioni alle differenze finite** (1773, 1777)

Altre indagini e studi statistici tra gli anni 1750-1780 (Kaestner, Clark, Michell, Buffon, **Deparcieux**, **Lambert**, Fuss, Kersboom, Wargentin...)

Condorcet è promotore di una **scienza sociale su basi statistico-probabilistiche**. Discute per primo la correttezza delle **votazioni a maggioranza** (*Essai sur l'application de l'analyse á la probabilité des décisions rendues á la pluralité des voix*, Parigi, 1785).

Jean Trembley. Tentativi di **semplificazione e divulgazione, 1799.**

Varie indagini tra il 1780 e il 1800 (Borda, Malfatti, Bicquille, Waring, Young,...)

Laplace è il matematico al quale forse più deve il calcolo delle probabilità, fondatore di una tradizione che **dominerà tutto l'Ottocento** (fondamenti del calcolo delle probabilità, calcolo della funzione generatrice, trasformata di Fourier)

Théorie analytique des probabilités, 1812.

Sviluppano ricerche inserite in questa tradizione anche:

Legendre (**metodo dei minimi quadrati**)

Gauss (**legge normale delle probabilità, metodo dei minimi quadrati**)

Poisson (**distribuzione di Poisson, legge dei grandi numeri**) 1837

Poincaré (**teorema di ricorrenza, ...**)



Bernard Bolzano: interpretazione della probabilità come **relazione logica tra proposizioni**, supportate da prove sperimentali, **1887**. Seguaci del **logicismo** nell'Ottocento:

George Boole, Stanley Jevons e Augustus **De Morgan**, ripreso quindi da William Ernest Johnson e da John Maynard **Keynes**.

Nella **seconda metà dell'Ottocento** altre voci soprattutto:

-in relazione alla **probabilità come frequenza o limite delle frequenze relative** (Ellis, Stuart Mill, Cournot, John Venn **1866**, Reichenbach, Richard von Mises **1919**)

-in relazione alla **generalizzazione del concetto classico di probabilità** della tradizione laplaciana: origini della **teoria logica della probabilità** (Von Kries **1886**, Wittgenstein **1922**, Waismann **~1930**, ...)

Dalla metà dell'Ottocento la probabilità guadagna terreno come **parte della fisica teorica**, dapprima nella **teoria del calore** (termodinamica statistica):

J. C. Maxwell 1860 (leggi dei gas)

Ludwig Boltzmann 1877 (**1° principio della termodinamica**)

Josiah Willard **Gibbs 1902** (**meccanica statistica**)

Poi la nascita della **quantomeccanica** vede la teoria delle radiazioni posta su basi probabilistiche da

Max Plank 1900

Con l'ulteriore sviluppo della **fisica dei quanti**, la probabilità raggiunge la **teoria atomica**.

Sembra diventare inadeguata una concezione deterministica della realtà (Laplace). Il concetto di **probabilità** diventa **una delle nozioni fondamentali di una moderna scienza e di una moderna filosofia della natura**.

Hesenberg, principio di indeterminazione 1930).

Ne deriva una **nuova necessità** di chiarire la struttura e l'idea di probabilità, e quindi un **nuovo impulso** agli **studi matematici** di questa disciplina.

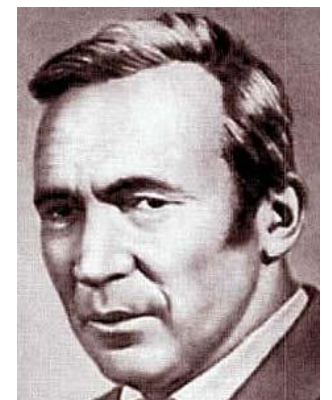
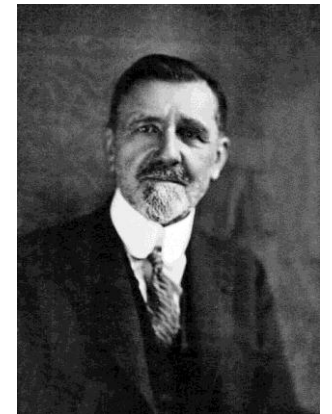
Agli **inizi del secolo scorso** risalgono poi lo sviluppo e le applicazioni della **statistica matematica** all'**eugenetica**, l'**epidemiologia**, l'**antropometria** e la **storia sociale**, con la fondazione del test di verifica d'ipotesi e della **teoria delle decisioni statistiche**: Karl **Pearson**, Francis **Galton** (**coefficiente di correlazione**, **fenomeni di regressione**, **test χ^2**) a partire dal **1900**.

Andreievič Markov 1906-07 : studio di catene di eventi tra loro collegate (**catene di Markov**).

Émile Borel 1909: *Eléments de la théorie des probabilités*

All'esigenza di dare un fondamento matematico alla teoria della probabilità e alla statistica in continuo sviluppo la matematica moderna offre gli strumenti adeguati: la **teoria degli insiemi**, la **teoria della misura**. **Soggettivismo** (Ramsey, **De Finetti 1925-30**)

Andrei Kolmogorov 1933 oltre a proseguire lo studio delle catene di Markov dà un **fondamento assiomatico** alla teoria della probabilità.



La teoria della probabilità entra nella scienza contemporanea in almeno tre modi:

- come ingrediente della **teoria degli errori** di misurazione,
- come strumento per **l'analisi dei fenomeni complessi**, che possono venire descritti soltanto facendo uso di valori medi,
- come componente della **descrizione dei fenomeni quantici**, secondo quanto sancito dal principio d'indeterminazione di Heisenberg, che afferma che, in tale ambito, il risultato di un'osservazione conduce sempre e solo a enunciazioni di probabilità di eventi futuri.



Esaminare con qualche approfondimento anche un solo aspetto del suo sviluppo storico richiede tempo e applicazione.

Mi limiterò pertanto ad un tema particolare che riguarda i problemi di assicurazione , che si basa su un lavoro in via di pubblicazione.

Aritmetica politica

William Petty (*Political Arithmetic*, 1676):

«the art of reasoning by figures upon things relating to government»

Condorcet: (*Rapport*, 1792)

«Peut-être ... dans plusieurs branches des sciences politiques, approchons-nous du terme où tout ce que la raison peut faire seule sera épuisé, où **l'application du calcul deviendra le seul moyen de faire des nouveaux progrès.**»

Diannyère : (*Collection*, 1796)

«**Les mots économie politique signifient**, d'après leur étymologie, **les lois de la maison publique ; et l'application du calcul à ces objets, s'appelle arithmétique politique.** Cependant, ..., l'économie politique a été restreinte ; elle embrasse seulement les lois administratives de la maison publique, et ce qu'on lui a ôté se nomme art social ou *science sociale*. Ce qui reste est assez vaste, c'est l'exposé et l'examen des lois administratives qui ont existé, qui existent et qui devraient exister. Il est assez important ; **c'est la diminution des malheurs de la génération actuelle et la préparation de la prospérité des générations futures.**»

Roederer : (*Collection*, 1796)

«Il est très-facile de concevoir que **la science de l'économie politique, ou plutôt publique, repose toute entière sur l'arithmétique politique.** Quand nous connoîtons les faciès qui intéressent la reproduction et la distribution des richesses dans différentes parties d'un grand pais comme la France, et entre différens états ; quand tous les produits pourront être rapprochés de toutes les circonstances qui les ont fait naître, qu'ils seront évalués et comparés les uns avec les autres, le raisonnement aura peu des choses à faire pour en **déduire des principes positifs et des théories certaines.**»

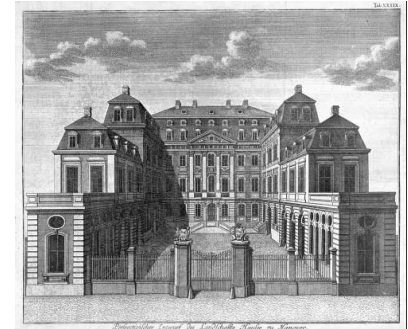
Fondi Pensione per le Vedove

Il più famoso nei territori tedeschi (fondato ad Hannover nel 1766, andò in crisi negli anni 1779–1780):

Calenbergische Witwen-Verpflegungs-Gesellschaft (noto come: “**Il Calenberg**”)

Nel Calenberg i sottoscrittori acquistavano un certo numero di unità di credito, detti *Simpla*, corrispondenti all’entità della pensione e all’età del marito e della moglie.

Il costo del *simplum* era ricalcolato ogni sei mesi sulla base delle uscite, costituite principalmente dalla pensioni da pagarsi, e delle entrate previste.



Hannover - Landschaftshaus sede del Calenberg

Polemica:

Anton Dies (amministratore) – Johann Agustin Ritter (Tesoriere di Göttinghen)

Altri fondi per vedove (negli anni 1760-70) :

Brema (fondato nel 1754)

Braunschweig – Hamburg (n. 4)

Gotha (Gothaische Witwenpflegshaften)

Danimarca (Danische Witwen-Casse ~ 1775, il primo fondato nel 1739, fallito nel 1754)

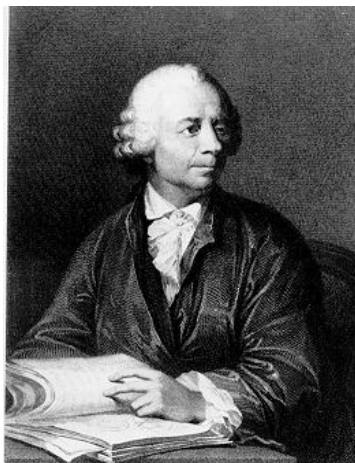
Berlino (fondato nel 1775, funzionò almeno fino al 1793):

Preußische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt

Eulero and Lagrange furono entrambi coinvolti in problemi di assicurazione concernenti le rendite vitalizie :

Eulero fu direttamente coinvolto dal senatore Kritter , che gli inviò il suo volume pubblicato nel 1768 sulle casse per le vedove, chiedendogli il suo parere professionale.

Lagrange fu coinvolto in un problema simile quando lo Stato Prussiano, istituì a sua volta un fondo pensioni per le vedove alla fine del 1775.



Leonhard Euler
(1707-1783)

***Der Herrn Leonhard Eulers nöthige
Berechnung zur Einrichtung einer
Witwencasse***, Neues Hamburgisches
Magazin, 1770.

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)



Sur les rentes viagères, Académie des
Sciences de Berlin, 22nd February
1776

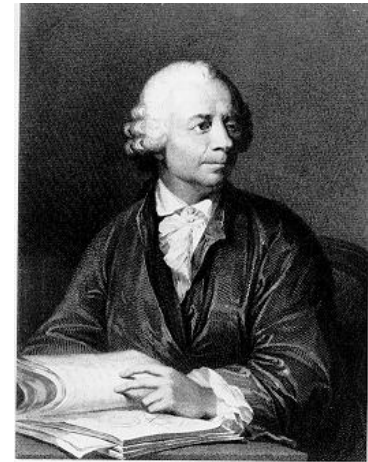
Leonhard Euler (1707-1783)

Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, t. 16, 1767, pp. 144-164 ;

Sur les rentes viagères, *Ibidem*, pp. 165-175.

Der Herrn Leonhard Eulers nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencasse, Neues Hamburgisches Magazin, 1770.

Eclaircissemens sur les établissement publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public qu'utile à l'Etat. St. Petersburg, de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, 1776.



ÉCLAIRCISSEMENTS
SUR LES
ÉTABLISSEMENTS
PUBLICS

EN FAVEUR TANT DES VEUVES QUE
DES MORTS

AVEC

LA DESCRIPTION
D'UNE NOUVELLE ESPECE
DE TONTINE

AUSSI FAVORABLE AU PUBLIC QU'UTILE À L'ÉTAT

CALCULÉS SOUS LA DIRECTION DE

MONSIEUR LÉONARD EULER.

PAR

MR. NICOLAS FUSS.

ADJOINT DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES.

.....

A St. PETERSBOURG,

De l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.

a = età del marito

b = età della moglie

x = capitale iniziale

z = premio annuale

p = pensione o rendita vitalizia

Siano: N il numero dei nati

(1) N il numero dei sopravvissuti dopo un anno

(2) N il numero dei viventi dopo due anni

.....

(a) N il numero dei viventi di età a

.....

($a + n$) N il numero degli uomini di età a
ancora vivi dopo altri n anni

Euler deduce I valori di (1), (2), ... , (95) dalle tavole di mortalità di Francia e Olanda (Deparcieux, Buffon, Kerssboom).



Età	N. sopravvissuti	Età	N. Sopravvissuti	Età	N. sopravvissuti	Età	N. sopravvissuti
0	1400	25	772	50	507	75	175
1	1125	26	760	51	495	76	160
2	1075	27	747	52	482	77	145
3	1030	28	735	53	470	78	130
4	993	29	723	54	458	79	115
5	964	30	711	55	446	80	100
6	947	31	699	56	434	81	87
7	930	32	687	57	421	82	75
8	913	33	675	58	408	83	64
9	904	34	665	59	395	84	55
10	895	35	655	60	382	85	45
11	886	36	645	61	369	86	36
12	878	37	635	62	356	87	28
13	870	38	625	63	343	88	21
14	863	39	615	64	329	89	15
15	856	40	605	65	315	90	10
16	849	41	596	66	301	91	7
17	842	42	587	67	287	92	5
18	835	43	578	68	273	93	3
19	826	44	569	69	259	94	2
20	817	45	560	70	245	95	1
21	808	46	550	71	231		
22	800	47	540	72	217		
23	792	48	530	73	203		

TAVOLA DI MORTALITA' DI W. KERSSEBOOM

TAVOLA EULERIANA

(1) = 0.804	(20) = 0.584	(39) = 0.439	(58) = 0.291	(77) = 0.104
(2) = 0.768	(21) = 0.577	(40) = 0.432	(59) = 0.282	(78) = 0.093
(3) = 0.736	(22) = 0.571	(41) = 0.426	(60) = 0.273	(79) = 0.082
(4) = 0.709	(23) = 0.565	(42) = 0.420	(61) = 0.264	(80) = 0.072
(5) = 0.688	(24) = 0.559	(43) = 0.413	(62) = 0.254	(81) = 0.063
(6) = 0.676	(25) = 0.552	(44) = 0.406	(63) = 0.254	(82) = 0.054
(7) = 0.664	(26) = 0.544	(45) = 0.400	(64) = 0.235	(83) = 0.046
(8) = 0.653	(27) = 0.535	(46) = 0.393	(65) = 0.225	(84) = 0.039
(9) = 0.646	(28) = 0.525	(47) = 0.386	(66) = 0.215	(85) = 0.032
(10) = 0.639	(29) = 0.516	(48) = 0.378	(67) = 0.205	(86) = 0.026
(11) = 0.633	(30) = 0.507	(49) = 0.370	(68) = 0.195	(87) = 0.020
(12) = 0.627	(31) = 0.499	(50) = 0.362	(69) = 0.185	(88) = 0.015
(13) = 0.621	(32) = 0.490	(51) = 0.354	(70) = 0.175	(89) = 0.011
(14) = 0.616	(33) = 0.482	(52) = 0.345	(71) = 0.165	(90) = 0.008
(15) = 0.611	(34) = 0.475	(53) = 0.336	(72) = 0.155	(91) = 0.006
(16) = 0.606	(35) = 0.468	(54) = 0.327	(73) = 0.145	(92) = 0.004
(17) = 0.601	(36) = 0.461	(55) = 0.319	(74) = 0.135	(93) = 0.003
(18) = 0.596	(37) = 0.454	(56) = 0.310	(75) = 0.125	(94) = 0.002

Sia M il numero dei mariti di età a ;
dopo un anno, 2 anni e generalmente
dopo n anni, essi sono in numero:

$$M \frac{(a+1)}{(a)}, \quad M \frac{(a+2)}{(a)}, \dots, \quad \frac{(a+n)}{(a)} M$$

Analogamente il numero delle rispettive mogli,
ancora vive dopo n anni è dato da:

$$\frac{(b+n)}{(b)} M$$

Euler equilibra entrate ed uscite, riportandole al loro valore attuale:

Somma iniziale : Mx

Dopo 1 anno : $Mx + \frac{(a+1)}{(a)} \frac{(b+1)}{(b)} M \frac{z}{k} - \frac{(b+1)}{(b)} \frac{(a)-(a+1)}{(a)} M \frac{p}{k} \quad (k = 1 + \frac{c}{100})$

Dopo 2 anni

ulteriori entrate ed uscite: $+ \frac{(a+2)}{(a)} \frac{(b+2)}{(b)} M \frac{z}{k^2} - \frac{(b+2)}{(b)} \frac{(a)-(a+2)}{(a)} M \frac{p}{k^2}$

e così via.

Ponendo: $Z = \sum_n \frac{(a+n)}{(a)} \frac{(b+n)}{(b)} \frac{z}{k^n}$ $P = \sum_n \frac{(b+n)}{(b)} \left(1 - \frac{(a+n)}{(a)} \right) \frac{p}{k^n}$

Eulereo arriva alla equazione:

$$x + Z = P$$

nella quale una delle incognite incognite x e z può essere fissata a piacere.

e posto infine

$$B = \sum_n \frac{(b+n)}{(b)k^n} \quad ; \quad C = \sum_n \frac{(a+n)(b+1)}{(a)(b)k^n}$$

deduce poi l'equazione fondamentale

$$x + C z = (B - C) p$$

in base alle quale possono essere calcolti I premi **x** e **z** che ogni marito deve pagare solo in relazione alla sua età e a quella di sua moglie, in accordo col **principio di equità**.

Eulero fornisce poi diverse tavole per i valori di **x** e **z** in funzione l'una dell'altra e dell'età.

Innanzitutto egli scrive: $a = b + d$, dove d indica la differenza di età della moglie e del marito, ammettendo anche valori negativi, e assumendo 95 anni come l'età massima.

Quindi semplifica I calcoli scegliendo di considerare I dati costanti per gruppi di cinque anni e quindi sostituendo I termini nelle serie di sopra con le loro medie calcolate su cinque anni.

25. Développons encore quelques cas où les femmes sont plus âgées que les maris; et soit d'abord $d = -5$, ou bien $a = b - 5$; et nous aurons, pour le calcul suivant,

$$V = 5(b+3)k^{b-2}(b-2)$$

et

$$W = (b)k^{b+1}(b-5);$$

et de là on construira la table qui suit.

VIII. TABLE¹⁾

des valeurs de la lettre C et de $B - C$, pour le cas $a = b - 5$.

b	V	T	C	$B - C$
90	0,00025	0,00025	0,72974	0,84456
85	0,00519	0,00544	1,31843	0,99610
80	0,04304	0,04848	2,24766	1,18567
75	0,18156	0,23004	3,27895	1,32221
70	0,50945	0,73949	4,37585	1,55849
65	1,15195	1,89144	5,36127	1,72613
60	2,30050	4,19194	6,26254	1,85118
55	4,22206	8,41400	7,08373	1,94659
50	7,33930	15,75330	7,90375	1,93922
45	12,07241	27,82571	8,74182	1,88195
40	19,06192	46,88763	9,38639	1,97764
35	29,77107	76,65870	9,79370	2,04720
30	46,89732	123,55602	10,00063	2,15731
25	73,56683	197,12285	10,35060	1,98830

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B - C$ pour le cas $a = b - 5$.

b	$B - C$	b	$B - C$	b	$B - C$	b	$B - C$
90	0,84417	70	1,55845	50	1,93926	30	2,15709
85	0,94341	65	1,72610	45	1,88187	25	1,98644
80	1,18667	60	1,86988	40	1,95602		
75	1,32219	55	1,94668	35	2,04668		

L. G. D.
26*

Eulero costruisce le tavole numeriche dei valori di B per tutte le età delle mogli di cinque in cinque anni tra 15 e 90, dai quali egli deriva le tavole dei valori di C e $C - B$, variando a ogni cinque anni,

nei casi principali $a = b, b + 5, b + 10, \dots, b + 30$, ed inoltre: $a = b - 5, b - 10$.

(probabilmente con il contributo di Nicolas Fuss, membro aggiunto dell'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo)

TABLE I¹⁾

des prix que chaque mari doit payer tout à la fois au commencement, tant par rapport à son âge qu'à celui de sa femme, pour assurer à celle-ci une pension de 100 Roubles.

Age de la femme	Excès de l'âge du mari sur celui de sa femme												Excès de l'âge de la femme sur celui du mari					
	0		5		10		15		20		25		30		5		10	
Ans	R. ²⁾	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
90	98	39													84	46	57	54
85	134	33	157	29											99	61	74	27
80	157	96	211	49	242	64									118	57	83	80
75	181	78	235	34	302	89	342	88							132	22	102	54
70	199	11	265	53	333	90	414	73	462	96					155	85	123	97
65	215	16	271	15	351	16	430	13	519	23	572	35			172	61	143	33
60	222	73	275	24	341	90	432	23	518	80	613	77	670	7	185	12	154	83
55	231	53	276	78	337	63	412	54	510	34	602	20	700	93	194	66	161	16
50	232	97	275	92	327	75	395	38	476	73	580	29	676	20	193	92	159	44
45	227	65	272	0	320	50	378	11	451	58	538	51	647	20	188	19	169	39
40	217	94	264	57	311	55	365	11	427	92	506	65	598	67	197	76	184	52
35	218	2	244	79	291	11	343	93	400	91	467	4	548	87	204	72	173	31
30	221	25	237	38	263	91	314	17	369	30	428	85	496	50	215	73	170	66
25	227	20	234	43	250	32	279	19	330	78	387	34	447	17	198	83		
20	212	52	242	86	250	14	268	2	298	62	352	59	410	88				
15	195	47	227	29	258	52	267	11	286	33	318	79	374	81				

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale; voir la note 1 p. 212. L. G. D.

2) R. et C. sont les abréviations de *Roules et Copeks*. L. G. D.

TABLE II¹⁾

des prix que chaque mari doit payer pendant sa vie, pour procurer à sa femme, après sa mort, une pension de 100 Roubles.

Age de la femme	Excès de l'âge du mari sur celui de sa femme								Excès de l'âge de la femme sur celui du mari			
Ans	0	5	10	15	20	25	30	5	10			
	R. C.	R. C.	R. C.	R. C.	R. C.	R. C.	R. C.	R. C.	R. C.			
90	61 87							48 83	28 78			
85	68 14	90 31						42 96	28 88			
80	55 35	91 22	120 90					36 51	23 31			
75	48 5	72 46	117 75	157 83				30 90	22 41			
70	40 28	62 5	92 87	148 81	200 87			28 99	21 77			
65	36 25	50 44	76 74	113 61	179 34	242 13		27 13	21 54			
60	32 34	43 27	60 4	90 21	132 15	206 24	277 69	25 49	20 46			
55	30 1	38 11	50 74	69 86	103 58	150 24	232 2	24 8	19 14			
50	27 37	34 13	43 32	57 39	78 47	115 13	165 70	21 78	17 24			
45	24 35	30 55	38 7	48 21	63 53	86 32	125 63	19 32	17 6			
40	21 40	27 22	33 69	41 90	52 93	69 43	93 88	19 4	17 54			
35	20 45	23 55	29 32	36 58	45 39	57 16	74 65	18 97	15 60			
30	19 94	21 73	24 80	31 6	38 70	48 1	60 23	19 34	14 64			
25	20 25	21 32	22 82	26 18	32 67	40 60	50 8	17 25				
20	18 24	21 40	22 19	24 16	27 68	34 40	42 51					
15	15 94	19 3	22 22	23 13	25 50	28 90	35 79					

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale; voir la note 1 p. 214. L. G. D.

Dopo aver determinato i valori di ***B***, ***C*** e delle loro differenze in relazione all'età del marito e della moglie, Eulero risolve l'equazione fondamentale per diversi valori di ***x*** e ***z***.

Prima di tutto i casi limite
supposto ***z* = 0** si ha

$$x = (B - C) p$$

dove ***x*** è il capitale sborsato in un unico pagamento (***premio unico puro***) per garantire la ***pensione annuale p***.

Nell'altro caso si ha ***x* = *z***, mentre la pensione ***p*** è garantita da ***premi annuali*** costanti. In questo caso si ha :

$$z = \frac{(B - C) p}{1 + C}$$

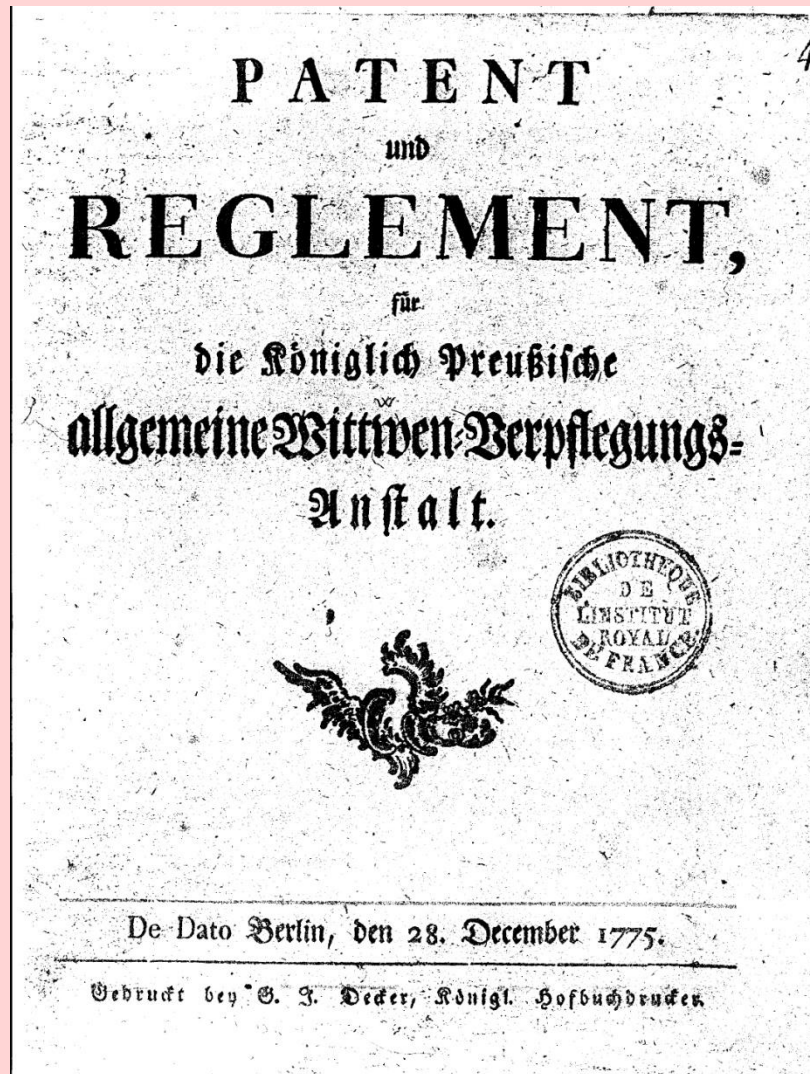
Per questi due casi Eulero fornisce le tavole di ***x*** e ***z***, in funzione sia all'età della moglie che della differenza di età della coppia.

La pensione è fissata in **100 rubli** ma data la proporzionalità in ***p*** le tavole possono essere usate per una pensione di importo qualsiasi.

Inoltre, possono essere usate per calcolare i premi per un **infinito numero** di **casi intermedi**, che possono sorgere.

In questa memoria, Euler risolve il **problema generale delle rendite vitalizie** con pagamenti singoli o periodici .

Il **metodo di Eulero** può essere esteso a tutti i tipi di **assicurazioni sulla vita**.



il 28 dicembre 1775, è pubblicato a Berlino il regolamento di un istituto assicurativo per le vedove, sostenuto da alcuni ministri prussiani e in particolare von der Schulenburg.

(un precedente fondo per le vedove a Berlino era fallito nel 1745.)

Patent und Reglement für die Königlich Preussische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt, Berlin, den 28 Dezember 1775, Decker.

L'**Istituto Prussiano per la Sussistenza delle Vedove** era una cassa pubblica in cui un marito poteva assicurare a moglie, in caso di sua morte, una rendita vitalizia di 25 *talleri*, o un qualunque multiplo di questa somma fino ad un massimo di 1000 *talleri*. In cambio accettava le seguenti condizioni:

- ✦ un ***pagamento immediato*** proporzionale alla rendita e correlato alla sua età e a quella di sua moglie. Questa somma sarebbe stata **restituita a lui o ai suoi eredi** in caso di fine del matrimonio, per decesso o per divorzio.
- ✦ un ***pagamento annuale***, per tutta la durata del matrimonio, di una somma fissa ancora proporzionale alla rendita futura e correlata alla sua età e a quella di sua moglie.

Il regolamento dell'Istituto prussiano per le vedove presentava le tabelle dei valori della somma iniziale ***p*** e della contribuzione annuale ***q*** per una pensione di 25 *talleri*, in corrispondenza ad ogni età del marito ***A***, da 20 a 60 anni, e della moglie ***B***, da 13 a 90 anni.

Lagrange era a Berlino, chiamato da Federico II a prendere il posto lasciato da Eulero.

Egli esaminò le regole del fondo pensioni prussiano e basandosi sul calcolo della probabilità espresse le sue critiche ad alcuni membri dell'Accademia.



Il problema era enunciato da Lagrange come segue:

Una certa persona A di età α vuole acquistare una rendita vitalizia annuale pari ad r , in favore di un'altra persona B di età β , da godersi solo dopo la morte di A supposto che B gli sopravviva. Per questo A offre in cambio:

- di effettuare un pagamento immediato di una data somma p , a condizione che questa sia restituita a lui o ai suoi eredi, in caso di morte di A o di B.**
- di pagare una somma annuale q durante la vita contemporanea di A e B.**

La questione che si pone è se questo contratto è a vantaggio o a svantaggio di A .

Le somme p e q sono pagate all'inizio di ogni anno, all'interesse composto di 1 a n ("au denier n ").

Lagrange fornisce la soluzione secondo **tre diverse procedure**.

La prima soluzione è la più standard, anche se meno rapida, e come in Eulero, usa il calcolo combinatorio per analizzare i vari casi che possono succedere di anno in anno, poi moltiplicando la probabilità di ciascuno per la somma che **A** deve guadagnare o perdere in quel caso (**speranza matematica**), considerando le perdite come guadagni negativi, riportando le somme pagabili in tempi diversi al loro **valore attuale**; infine sommando tutti questi prodotti (**speranza totale**).

Se positiva, la speranza totale avrebbe espresso un vantaggio per **A**, se negativa, uno svantaggio.

La probabilità di tutti questi casi non può essere stimata *a priori*, ma dedotta dalle tavole di mortalità. Lagrange cita diverse tavole di Halley, Hodgson, Kersseboom, Deparcieux, Simpson, Buffon, Wargentin, Süssmilch e Lambert. Alla fine usa quelle di **Simpson** e **Deparcieux**, poiché esse presentavano le maggiori differenze:

Antoine Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine; D'où l'on déduit la manière de déterminer les Rentes viagères, tant simples qu'en Tontines: Précédé d'une courte Explication sur les Rentes à terme, ou Annuités; Et accompagné d'un grand nombre de Tables*. Frères Guérin, Paris, 1746. Id., *Addition à l'Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, Paris, H. L. Guérin et L.F. Delatour, 1760.

Thomas Simpson, *The Doctrine of Annuities and Reversions, ... with ... tables, shewing the values of single and joint lives, etc. at different rates of interest...*, London, J. Nourse, .

Edmund Halley, *An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*, Philosophical Transactions, 17, n° 196 (1693)

Some further considerations on the Breslaw bills of mortality, Philosophical Transactions, 17, n° 198 (1693)

James Hodgson, *The Valuation of Annuities upon Lives; deduced from the London Bills of Mortality*. London, J. Hinton, 1747.

Willem Kerseboom, *Eerste verhandeling tot een proeve om te weeten de probable menigte des volks in de provincie van Hollandt en West-Vrieslandt*, 's Gravenhage, 1738. *Tweede verhandeling tot een proeve om te weeten etc.* 1742. *Derde verhandeling tot een proeve om te weeten etc.* 1742. *Proeven van politique rekenkunde*, 1748 (new ed.)

Georges Louis Leclerc Buffon, *Histoire naturelle: générale et particulière; avec la description du Cabinet de roi*, Paris, Imprimerie Royale, 1749-1789

Pehr Wilhelm Wargentin, *Mortaliteten i Sverige, i anledning af Tabell-Verket*, Kungl. Vetenskaps-Academiens Handlingar, 1766 (XXVII), pp. 1-25

Johann Peter Süßmilch, *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflanzung desselben*, Berlin, Spener-Verlag, 1741. (3rd edition: 1761-1762)

Johann Heinrich Lambert, *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung... Mit Kupfer (und Tafeln)*, Berlin, Realschule, 1765.

7. Ajoutant donc ensemble ces deux expressions et simplifiant en retranchant les termes $\alpha p + q$ que A doit payer d'abord, on aura pour l'expression totale de A il est à dire pour l'avantage qu'il se doit d'attendre, la formule

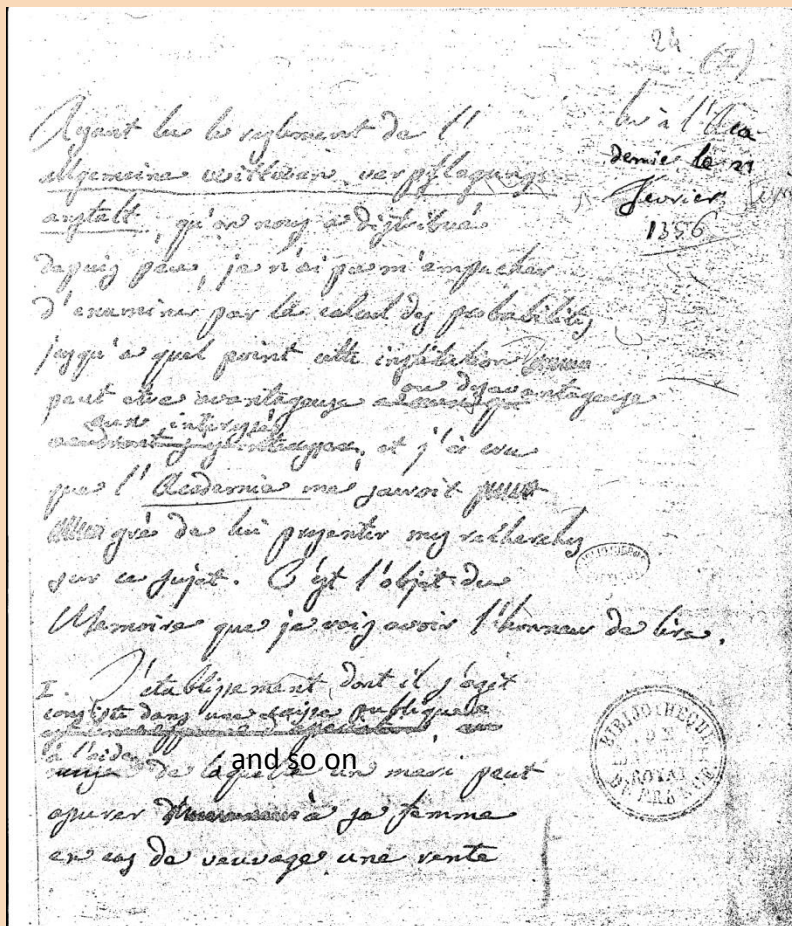
$$p \left(-1 + \frac{(\alpha)(\beta) - (\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{(\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha)(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 2}} + \frac{(\alpha+2)(\beta+2) - (\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha)(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 3}} + \alpha_i \right) \\ - \left(1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha)(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 2}} + \frac{(\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha)(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 3}} + \alpha_i \right) \\ - p \frac{(\alpha) - (\alpha+1)}{(\alpha)} \left(\frac{(\beta+1)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{(\beta+2)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 2}} + \frac{(\beta+3)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 3}} + \alpha_i \right)$$

$$+ p \frac{(\alpha+1) - (\alpha+2)}{(\alpha)} \left(\frac{(\beta+2)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 2}} + \frac{(\beta+3)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 3}} + \alpha_i \right) \\ + p \frac{(\alpha+2) - (\alpha+3)}{(\alpha)} \left(\frac{(\beta+3)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 3}} + \alpha_i \right) \\ + \alpha_i$$

Or il est facile de voir que les trois fractions multipliées par α se réduisent à cette simple fraction

$$r \left(\frac{(\alpha) - (\alpha+1)}{(\alpha)} \chi \frac{(\beta+1)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{(\alpha) - (\alpha+2)}{(\alpha)} \chi \frac{(\beta+2)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 2}} + \frac{(\alpha) - (\alpha+3)}{(\alpha)} \chi \frac{(\beta+3)}{(\beta) \chi^{1+\frac{1}{n} \cdot 3}} + \alpha_i \right)$$

Il reste que l'avantage cherché de A se trouvera exprimé en général par cette formule après simplification



J.L. Lagrange, *Sur les rentes viagères*, Bibliothèque de l'Institut de France, MS 916.

Lagrange definisce:

(0), (1), (2), (3), (4), ...

I numeri, dedotti dalle tavole di mortalità, degli individui che sopravvivono fino a:

1, 2, 3, 4, ... anni di età, in modo tale che su (0) nuovi nati, ci sono (1), (2), (3), ... che raggiungono il loro primo, secondo, terzo, ecc anno di età.

In questo modo la probabilità che una persona di m anni viva ancora n anni, è espressa da

$$\frac{(m+n)}{(m)}$$

la probabilità che la stessa persona muoia tra le età μ e ν è espressa da:

$$\frac{(\mu) - (\nu)}{(m)}$$

e così via.

Lagrange considera l'interesse composto, così il valore attuale x di una somma s pagabile dopo α anni è espressa da

$$x = \frac{s}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}$$

Lagrange ottiene la soluzione in tre modi diversi

Sommando insieme la **speranza matematica** di tutti i casi e sottraendo la somma $p+q$ che A deve pagare immediatamente, Lagrange trova la **speranza totale** data dalla formula

$$\begin{aligned} & p \left(-1 + \frac{(\alpha)(\beta) - (\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{(\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{(\alpha+2)(\beta+2) - (\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \dots \right) \\ & - q \left(-1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{(\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \dots \right) \\ & + r \left(\frac{(\alpha) - (\alpha+1)}{(\alpha)} \times \frac{(\beta+1)}{(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{(\alpha) - (\alpha+2)}{(\alpha)} \times \frac{(\beta+2)}{(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{(\alpha) - (\alpha+3)}{(\alpha)} \times \frac{(\beta+3)}{(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Quindi Lagrange ottiene la stessa soluzione più rapidamente considerando successivamente il guadagno e la perdita di A per ciascun anno.

Nella terza soluzione Lagrange ottiene il risultato ancora più semplicemente trasformando il problema nel seguente, risolubile con le regole ordinarie del calcolo delle rendite:

Un individuo A di età α vuole procurare una rendita vitalizia annua della somma r in favore di B di età β in cambio di un pagamento annuo (*premio*) di

$$\frac{p}{n+1} + q + r$$

durante le vite contemporanee di A e B .

Ciascuna somma è pagata all'inizio di ogni anno; l'interesse è di $1/n$.

Egli ottiene la nuova formula della *speranza totale*

$$r(b - c) - \left(\frac{p}{n+1} + q \right) (c + 1)$$

dove b esprime il valore attuale di una rendita vitalizia uguale ad 1 in favore di un individuo di età β e c il valore attuale di una simile anualità in favore di due persone di età α e β che cessa alla morte di uno dei due.

$$b = \frac{(\beta + 1)}{(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{(\beta + 1)}{(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{(\beta + 1)}{(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \dots$$

$$c = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha)(\beta) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \dots$$

Lagrange ottiene i valori di b , c e $b-c$ per differenti contribuzioni p and q dalle tavole del Fondo Prussiano per le vedove e quindi valcola la speranza totale;

per esempio, se moglie e marito hanno entrambi vent'anni per una pensione di 25 *talleri* le tavole danno $p = 10$ e $q = 1 + 1/12$.

Dalle tavole di mortalità di Simpson Lagrange trova $b-c = 2.9$, e $c = 11.1$; da quelle di Deparcieux $b-c = 2.42$ and $c = 14.6$.

$$r(b - c) - \left(\frac{p}{n + 1} + q \right) (c + 1)$$

Dalla sua formula deduce il vantaggio: secondo Simpson di 55.2 *talleri*, e secondo Deparcieux di 38.4 *talleri*.

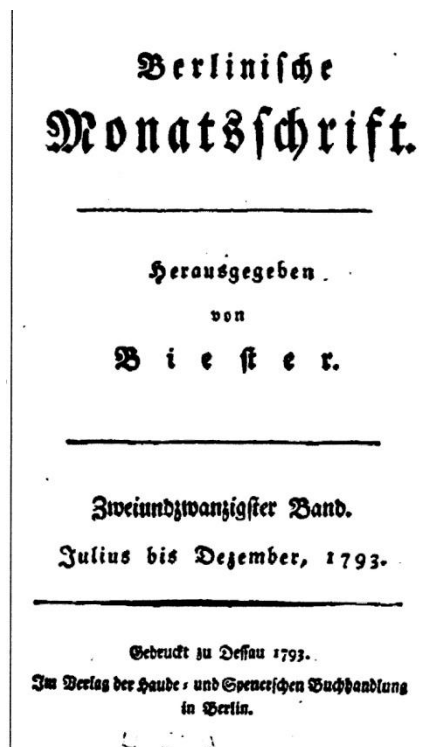
In ogni caso, calcolando il vantaggio per ogni età tra 20 e 60 anni, egli conclude che **il vantaggio sarà sempre dalla parte dell'assicurato, e che questo vantaggio sarà sempre maggiore, quanto più giovane sono gli assicurati.**

Lagrange lesse la sua memoria ***Sur les rentes viagères*** all'Accademia delle Scienze di Berlino il 22 Febbraio 1776. In questa memoria dimostrava che l'Istituto, che doveva pagare le pensioni e raccogliere i pagamenti, sarebbe finito in bancarotta, contraddicendo così von Schulenburg,

La memoria, perciò, rimase inedita, circolando in forma manoscritta all'interno di una ristretta cerchia di studiosi.

Le critiche di Lagrange furono riprese da Krieger, che lo stesso anno 1776 inviò a von der Schulenburg uno studio in cui si prediceva il fallimento del fondo entro 7 o 10 anni. Poi Krieger pubblicò altri scritti con dettagli matematici delle sue predizioni.

L'Istituto Prussiano per la sussistenza alle vedove continuò a funzionare ancora almeno fino al 1793, quando la polemica riapparve in un lungo articolo sui *Berlinische Monatsschrift*



Eulero ha scritto quattro memorie sul gioco del lotto.

1. *Réflexions sur une espèce singulière del loterie, nommé Loterie genoise*, letta all'Accademia delle Scienze di Berlino il 10 marzo 1863, pubblicata nell'*Opera postuma* del 1861.

La prima contiene una descrizione dettagliata del gioco del lotto.

n = il numero dei biglietti contenuti nell'urna, numerati da 1 a n ,

t = numero di biglietti estratti

Il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili determina la probabilità che nell'estrazione di t numeri esca un numero fissato, oppure che ne escano due fissati, tre, ecc. fino a t .

Il premi sono calcolati dividendo la posta per la probabilità del verificarsi dell'evento "selon les règles de l'égalité".

E' considerato anche il caso che il giocatore punti su più numeri ed escano solo alcuni di questi. In tal caso i premi possono essere fissati in una infinità di modi.

Eulero fornisce le formule per tutti questi casi. Specializza poi i casi di: $n = 90$ e $t = 5$, che è il caso della lotteria genovese storica, e di: $n = 100$ e $t = 9$.

BIBLIOGRAFIA

M. T. Borgato, *Euler, Lagrange and Life Insurance*, Leonhrad Euler: 300th Anniversary, St Petersburg, Nestor-Istorija, 2008, pp. 115-137.

M. T. Borgato, *Lagrange et les fonds de pension pour les veuves*, Bollettino di Storia dle Scienze Matematiche, 2013, pp. 1-50.

Andrew I. Dale. *A History of Inverse Probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson*, 2nd edition, Springer 1999.

M. C. Galavotti, *Intepretazioni della probabilità*, Linee di ricerca SWIF, 1.0, pp. 1.27.

Florence Nightingale David. *Games, Gods & Gambling: A History of Probability and Statistical Ideas*, Dover Publications 1998.

J.-L. Lagrange, *Sur les rentes viagères*, editée par M. T. Borgato, Bollettino di Storia dle Scienze Matematiche, 2013, pp. 51-80.

Isaac Todhunter, *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan and co., 1865